多次元戸田格子の線形化とBacklund変換(ソリトン系のダイナミックスとそれに関するカオスの問題,研究会報告)

AUTHOR(S):

斎藤, 革子; 瀧澤, 英一

次に文献4での結果は

(d) Toda方程式

逆散乱法で使う Flaschka 方程式を満す $\varphi(n)$ (n は格子の番号) と相互作用戸田解 $V_i(n)$ との関係が

$$V_i(n) \propto a(n)\,\varphi_i(n)\,\varphi_i(n+1)$$

この $a(n)$ は Flaschka 方程式の係数。

尚 $V_i(n)$, $\varphi_i(n)$ 等の具体的な関数形は文献5に説明してあります。

§3 むすび

さしあたり4種の方程式について説明したが，このやり方は他の方程式へも適用可能であり，順次発表予定です。

又，以上は無限区間の話であるが，AKNS的な逆散乱法の使えない周期的境界条件の時にどうなるかは大変興味のある問題である。

参考文献

1) The Korteweg-de Vries Two-Soliton Solution as Interacting Two Single Solitons, Prog. Theor. Phys. **71**, (1984) 843.
2) Interacting Korteweg-de Vries Equations and Attractive Soliton Interaction, Prog. Theor. Phys. **72**, (1984) 1081.
3) Direct Relationship between an Interacting Soliton Picture and the Inverse Method, J. Phys. Soc. Jpn. **54**, (1985) 451.
4) The Toda Equation; Its Interacting Soliton Solution Directly Relates to the Flaschka Solution, J. Phys. Soc. Jpn. **54**, (1985) 3653.
5) Interacting Toda Equations, J. Phys. Soc. Jpn. **55** (1986) #3.

多次元戸田格子の線形化とBäcklund変換

横浜国大・工　斎藤革子，瀧澤英一

多次元戸田格子を

$$f_n \partial_+ \partial_- f_n - (\partial_+ f_n)(\partial_- f_n) + f_{n+1} f_{n-1} - f_n^{\,2} = 0 \tag{1}$$

$f_n = f_n(x,\ y)$, ∂_+, ∂_- ：独立な線形微分演算子と定義する。この(1)式は

$$\exp[-(u_n - u_{n-1})] - 1 = -\partial_+ \partial_- \ln f_n$$

とおくと

$$\partial_+ \partial_- u_n = \exp(u_n - u_{n+1}) - \exp(u_{n-1} - u_n)$$

となるから，戸田格子であることは明らかであろう。

$$\partial_+ \equiv \sqrt{-\alpha}\,\frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{\beta}\,\frac{\partial}{\partial y}\,, \qquad \partial_- \equiv \sqrt{-\alpha}\,\frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{\beta}\,\frac{\partial}{\partial y}$$

とするとき， metric を$-\alpha = \beta = 1$ととれば，xは時間，yは連続空間を表すことになるから(1)は二次元戸田格子，$\alpha = \beta = -1$ととればx，yは連続空間を表わして(1)は三次元 static 戸田格子となる。

［1］ (1)の円筒対称な場合

$$f_n\left(f_n'' + \frac{1}{\rho} f_n'\right) - (f_n')^2 - [f_{n+1} f_{n-1} - f_n^{\,2}] = 0 \tag{2}$$

$$f_n = f_n(\rho)\,, \quad \rho = \sqrt{\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta}}\,, \quad f_n' \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} f_n$$

には，Recurrence Formulae

$$\begin{cases} f_n = P_n f_{n+1} + q_n f_{n-1}\,, & (3) \\ f_n' = r_n f_{n+1} + s_n f_{n-1}\,, & (4) \end{cases}$$

に依って線形化されるということを先の研究会で報告した。[1] この線形化の為の整合条件は，

$$u_n \equiv r_n / P_n\,, \quad v_n \equiv s_n / q_n\,, \quad w_n \equiv P_n / \Delta_n = \Delta_n / q_n\,, \quad \Delta_n \equiv P_n s_n - q_n r_n$$

とおくと

$$(\ln w_n)'' + \frac{1}{\rho}(\ln w_n)' + \left(\frac{w_n}{w_{n+1}} - \frac{w_{n-1}}{w_n}\right) = 0, \tag{5}$$

$$u_n = \frac{a_n}{\rho} - \frac{\rho}{2} + \frac{1}{\rho} \int^{\rho} d\rho' \frac{w_{n-1}}{w_n} \rho', \tag{6}$$

$$v_n = \frac{b_n}{\rho} - \frac{\rho}{2} + \frac{1}{\rho} \int^{\rho} d\rho' \frac{w_n}{w_{n+1}} \rho', \tag{7}$$

で与えられた[Ref. 1)]（但し，これは必要条件）

ところで，整合条件のうち w_n を決める方程式(5)は

$$w_n = \frac{g_n}{g_{n+1}}$$

とおくと

$$g_n \left[g_n'' + \frac{1}{\rho} g_n' \right] - (g_n')^2 - \left[g_{n+1} g_{n-1} - g_n^2 \right] = 0, \tag{2}$$

即ち戸田格子に他ならない!! この g_n を用いると

$$u_n = a_n/\rho + g_n'/g_n \tag{8}$$

$$v_n = b_n/\rho + g_{n+1}'/g_{n+1} \tag{9}$$

となるから，線形化の為の整合条件は(2)と(8), (9)である。以上のことを言い換ると多次元戸田格子(2)の１つの解 g_n が与えられたとき， u_n， v_n を(8), (9)として f_n に対する線形方程式とRecurrence Formulaeはそれぞれ

$$f_n'' + \left(\frac{1}{\rho} - u_n - v_n \right) f_n' + (1 + u_n v_n) f_n = 0, \tag{10}$$

及び

$$f_n = \frac{\pm 1}{u_n - v_n} \left(\frac{g_n}{g_{n+1}} f_n + \frac{g_{n+1}}{g_n} f_{n-1} \right), \tag{11}$$

$$f_n' = \frac{\pm 1}{u_n - v_n} \left(\frac{g_n}{g_{n+1}} u_n f_{n+1} + \frac{g_{n+1}}{g_n} v_n f_{n-1} \right) \tag{12}$$

と与えられる。そこで線形方程式(10)をといてその解 f_n が(11), (12)を満たせば f_n は(2)の新たな解である。これはBäcklund変換（BT）に他ならない。（g_nはBTによって f_n を生成する。）

例：

i） $g_n = 1$ から生成される解は　$f_n = \Sigma_{n+\alpha}(\rho)$（$\alpha$ は任意）

即ち，　$g_n = 1 \xrightarrow{BT} f_n = \Sigma_{n+\alpha}(\rho)$.

ii) $g_n = \Sigma_{n+\alpha}(\rho) \xrightarrow{\mathrm{BT}} f_n = C + \varepsilon \sum_{m=n}^{\infty} \Sigma_{n+m}{}^2(\rho)$. (C, ε は任意)

iii) もし $g_n(\rho) \xrightarrow{\mathrm{BT}} f_n(\rho)$ ならば

$$\tilde{g}_n = \rho^{kn+\alpha} g_n(\rho) \xrightarrow{\mathrm{BT}} \tilde{f}_n = \rho^{kn+\alpha} f_n(\rho) .\ (k,\ \alpha \text{ は任意})$$

iv) もし $g_n(\rho) \xrightarrow{\mathrm{BT}} f_n(\rho)$ ならば

$$\tilde{g}_n = r^{n(n-1)} \exp\left[-\frac{1-r^2}{4}\rho^2\right] g_n(\rho)$$

$$\xrightarrow{\mathrm{BT}} \tilde{f}_n = r^{n(n-1)} \exp\left[-\frac{1-r^2}{4}\rho^2\right] f_n(r\rho) \quad (r \text{ は任意}).$$

[2] 以上の結果を一般の場合に拡張する事を考える。円筒対称の場合は線形方程式をといた上ですべての n に対して Recurrence Formulae を checkしなければならなかった。以下では，ある特別な一点 n で Recurrence Formulae を満たす様にしてといた線形方程式のすべての解は，すべて多次元戸田格子の解であることを示す.

Recurrence Formulae を

$$\begin{cases} \partial_+ f_n = P_n f_{n+1} + q_n f_n & (13) \\ \partial_- f_n = 1/P_n f_{n-1} + r_n f_n & (14) \end{cases}$$

とおく. P_n, q_n, r_n は多次元戸田格子(1)を線形化するように決めるものとする. 線形化された方程式は

$$\partial_+\partial_- f_n = P_n r_n f_{n+1} + \frac{q_n}{P_n} f_{n-1} + (1 + q_n r_n) f_n \tag{15}$$

は

$$\partial_+\partial_- f_n = r_n \partial_+ f_n + q_n \partial_- f_n + (1 - q_n r_n) f_n \tag{15$'$}$$

である. (13), (14) を微分して得られた線形方程式と(15)とが等価であるという条件から整合条件が導かれるが, 更に

$$P_{n-1} / P_n = 1 - \partial_+\partial_- \ln g_n$$

とおくと整合条件は g_n に対する多次元戸田格子方程式を与える. これは bäcklund 変換に他ならない。このとき線形化された方程式は

$$\partial_+\partial_- f_n - 1/P_n(a_n + \partial_+ \ln g_{n+1}) f_{n-1} - P_n(b_n + \partial_- \ln g_n) f_{n+1}$$

$$- [1 + (a_n + \partial_+ \ln g_{n+1})(b_n + \partial_- \ln g_n)] f_n = 0 \qquad (\partial_- a_n = 0, \quad \partial_+ b_n = 0) \tag{16}$$

と与えられる.

この方程式の解が多次元戸田格子の解となる十分条件は以下の様にして決められる. 即ち;

$$F_n^+ \equiv \partial_+ f_n - P_n f_{n+1} - q_n f_n \tag{17}$$

$$F_n^- \equiv \partial_- f_n - \frac{1}{P_n} f_{n-1} - r_n f_n \tag{18}$$

と定義する。Recurrence Formulaeは $F_n^\pm = 0$.

(17), (18)の両辺を微分して, 線形化された方程式を用いると

$$\partial_+ F_n^- + \frac{1}{P_n} F_{n-1}^+ + r_n f_n^+ = 0 \tag{19}$$

$$\partial_- F_n^+ + P_n F_{n+1}^- + q_n F_n^- = 0 \tag{20}$$

を得る. この二つの式は, もし, $n = n_0 < \infty$ に対して

$$F_{n_0}^+(x,\ y) = 0, \quad \forall x,\ y$$

ならば

$$F_n^\pm(x,\ y) = 0, \quad \forall n,\ x,\ y$$

であることを示している. 従って, (16)の解のうち, ある一点でRecurrence Formulaeを満たす様に決めてやったすべての解は任意のnについてRecurrence Formulaeを満たすから, 多次元戸田格子の新たな解である.

Ref. 1) 斎藤, 瀧澤, 武野：物性研究 45－1 (1985－10) 12.

Spherical Boussinesq Equation と Classical Boussinesq Equation の関係

広大・工　広 田 良 吾

Spherical Boussinesq equation